|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Tentamen Logica**  **Thema 1.2 De geprogrammeerde applicatie**  **STHE** | | | Voltijd |
| Progresscode | **PIVP2APP1N** |  | |
| Datum | Tijd | Tijdsduur : 90 min. | |
| Opleiding  Informatica/Technische Informatica | | Aantal bladzijden: 4 | |
| Hulpmiddelen: niets toegestaan (gesloten boek) | | Bijzonderheden: *Alle* bladen dienen ingeleverd te worden. | |
| **NAAM: P.R.Oeftoets** | | | |
| **STUDENTNUMMER: 327234** | | | |

**Dit tentamen bestaat uit 5 vragen. Per vraag staat aangegeven hoeveel punten je kunt verdienen.**

**Je kunt tijdens het tentamen gebruik maken van een formuleblad, deze is achter de tentamenvragen geplaatst.**

**Maximaal aantal te behalen punten: 90.**

**Cijfer: (10 + punten) /10**

**SUCCES!**

**Opgave 1 [15] – formules, waarheidstabellen en uitspraken over formules**

1. [5] Maak een waarheidstabel (aflopende binaire volgorde!) van de onderstaande formule:

(p → ¬q) ↔ (p ∧ q)

1. [2] Is de bovenstaande formule een tautologie, contingentie of een contradictie?
2. [2] Geef een definitie van een contingentie.
3. [6] Bewijs, met behulp van een afleiding, de volgende uitspraak:

(p → ¬q) ¬ (p ∧ q)

Vermeld bij elke stap naam en nummer van de gebruikte stelling van het formuleblad.

**Opgave 2 [20] – logische gevolg volgens definitie, met waarheidstabel en met afleiding**

De formule is **gedefinieerd** als een logisch gevolg van als elke waardering die alle uitgangspunten tegelijk waar maakt, ook de conclusie waar maakt. De notatie hiervoor is . Een concreet voorbeeld is Hier is dus en genomen.

1. [5] Laat aan de hand van deze **definitie** zien dat geldt .

Een logisch gevolg kun je ook laten zien met behulp van een **waarheidstabel**. Door te laten zien dat ( een tautologie is, heb je op een andere manier aangetoond dat de formule is een logisch gevolg van .

1. [5] Laat aan de hand van een **waarheidstabel** zien dat geldt: .

Een logisch gevolg kun je ook laten zien met behulp van een **afleiding**. Als je in je afleiding de bewijsregels die op het laatste blad staan gebruikt om te laten zien heb je op een derde manier aangetoond dat formule is een logisch gevolg van .

c) [10] Geef een **afleiding** van . Schrijf bij elke tussenstap het nummer op van de gebruikte formule van het formuleblad.

**Opgave 3 [20] dis- / con- junctieve normaalvormen**

a) [7] De binaire operator ∆ is alleen waar als p uit q volgt en tegelijkertijd ook q uit p volgt. Schrijf p ∆ q in conjunctieve normaalvorm.

Gegeven is de volgende formule in conjunctieve normaalvorm:

p ∨ (¬q∧¬s) ∨ (¬r∧¬s)

b) [7] Leg uit voor hoeveel waarderingen (p,q,r,s) deze formule waar is?

c) [6] Schrijf alle waarderingen (p,q,r,s) uit voor welke deze formule **niet** waar is.

**Opgave 4 [20] - predicatenlogica**

Gegeven zijn de predicaten

* is een student
* heeft een OV kaart
* is een docent
* heeft een baan
* luiert graag

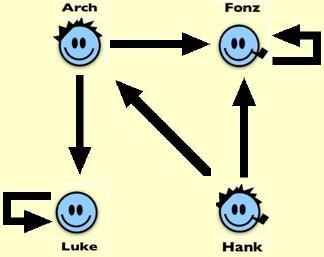
Schrijf de volgende uitspraken met behulp van deze predicaten op:

1. [1] Er is een student die niet graag luiert.
2. [2] Niet alle docenten hebben een OV-kaart.
3. [2] Er is geen student die een baan heeft.
4. [2] Alle docenten luieren graag.
5. [2] Iedereen is docent en luiert graag.
6. [2] Niet alle studenten luieren graag
7. [2] Er is een docent met een OV-kaart.
8. [2] Welke 2 van de bovenstaande 7 uitspraken zijn equivalent op grond van de algemene geldigheid
9. [2] Wat zijn in die situaties dan de formules voor en ?
10. [3] Toon met die formule voor , door middel van een afleiding, de equivalentie van die twee uitspraken aan.

**Opgave 5 [15] (on)waarheid binnen een model**

Het model hiernaast heeft een domein dat bestaat uit de 4 elementen Arch, Fonz, Luke en Hank. Er zijn twee 1-plaatsige predicaten *K(x): x is Kaal* en

*P(x): x rookt Pijp* Er is een 2-plaatsig predicaat *H(x,y): x heeft een Hekel aan y* weergegeven door een pijl van x naar y



Geef per formule aan of deze wel of niet waar is in het gegeven model. Geef daarnaast ook telkens een onderbouwing van je antwoord.

1. [1] ¬∀xK(x) ↔ ∃x¬K(x)
2. [1] ∃x¬P(x)
3. [2] ∀y(K(y) → H(y,y))
4. [2] ∀x∀y ( H(x,y) → H(y,x))
5. [2] ∀xP(x) ↔ ¬∃xK(x)
6. [2] ∀x∃y (K(x) → H(y,x))

Vertaal de volgende predicaten in “gewone Nederlandse zinnen” binnen de context van het gegeven model

g) ∀x(P(x) → K(x))

h) ∃xH(x,x)

i) ∀x∃yH(x,y)

j) ∃y∀xH(x,y)

h) ∃x∀yH(x,y)

**\*\*\*\* EINDE TENTAMEN \*\*\*\***

**Formuleblad Logica**

**Waarom wordt er gebruik gemaakt van Griekse letters in deze twee tabellen?**

In de twee tabellen wordt gebruik gemaakt van een aantal Griekse letters. Dat zijn en Je spreekt dat achtereenvolgens uit als “fie”, “psie” en “gie”. De reden om Griekse letters in plaats van propositieletters en in deze formules te gebruiken is het benadrukken van de algemene geldigheid van deze formules, ongeacht wat je *invult* voor en Misschien dat een voorbeeld dit iets duidelijker maakt. Je kunt aantonen dat door de formule [20] (De Morgan) toe te passen met en .

Elke formule heeft een nummer. Als je in een opgave een formule uit onderstaande tabellen gebruikt, noem dan het nummer.

*Tabel met standaardequivalenties*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Naam** | **Equivalentie** | |
| Commutativiteit | [1] | [2] |
| Associativiteit | [3] | [4] |
| Distributiviteit | [5] | [6] |
| Idempotentie | [7] | [8] |
| Absorptie | [9] | [10] |
| eigenschappen | [11]  [12] | [13]  [14] |
| eigenschappen | [15]  [16] | [17]  [18] |
| Dubbele negatie | [19] | |
| De Morgan | [20] | [21] |
| Implicatie-eliminatie | [22] | |
| Equivalentie-eliminatie | [23] | |

*Tabel met standaardgevolgen*

|  |  |
| --- | --- |
| **Naam** | **Gevolg** |
| Ex falso | [24] |
| Modus ponens | [25] |
| Contrapositie | [26] |
| Reductio ad absurdum | [27]als , dan |
| Conjunctie-introductie | [28] |
| Conjunctie-eliminatie | [29] |
| Modus tollens | [30] , |
| Hypothetisch syllogisme | [31] , |

**UITWERKING**

**Opgave 1 [15] – formules, waarheidstabellen en uitspraken over formules**

a) [5] Maak een waarheidstabel (aflopende binaire volgorde!) van de onderstaande formule:

(p → ¬q) ↔ (p ∧ q)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | p | → | ¬q | ↔ | p | ∧ | q |
| **1** | **1** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **1** | **0** | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **0** | **1** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **0** | **0** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

b) [2] Is de bovenstaande formule een tautologie, contingentie of een contradictie?

Een contradictie (formule die voor alle waarderingen onwaar is)

c) [2] Geef een definitie van een contingentie.

Een formule die voor minstens 1 waardering waar en ook voor minstens 1 waardering onwaar is. (geen tautologie en geen contradictie)

d) [6] Bewijs, met behulp van een afleiding, de volgende uitspraak:

(p → ¬q) ⇔ ¬ (p ∧ q)

Vermeld bij elke stap naam en nummer van de gebruikte stelling van het formuleblad.

(p → ¬q) ⇔ [22] implicatie vervanging

¬p ¬q ⇔ [20] de Morgan

¬ (p ∧ q)

**Opgave 2 [20] – logische gevolg volgens definitie, met waarheidstabel en met afleiding**

De formule is **gedefinieerd** als een logisch gevolg van als elke waardering die alle uitgangspunten tegelijk waar maakt, ook de conclusie waar maakt. De notatie hiervoor is . Een concreet voorbeeld is Hier is dus en genomen.

a) [5] Laat aan de hand van deze **definitie** zien dat geldt .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **1** | **1** | 0 | 0 |  | 0 |  | 1 |  | 0 |
| **1** | **0** | 0 | 1 |  | 1 |  | 0 |  | 0 |
| **0** | **1** | 1 | 0 |  | 1 |  | 1 |  | 1 |
| **0** | **0** | 1 | 1 |  | 1 |  | 0 |  | 1 |

Een logisch gevolg kun je ook laten zien met behulp van een **waarheidstabel**. Door te laten zien dat ( een tautologie is, heb je op een andere manier aangetoond dat formule is een logisch gevolg van .

b) [5] Laat aan de hand van een **waarheidstabel** zien dat geldt: .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 0 | 0 |  | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |  | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |  | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Een logisch gevolg kun je ook laten zien met behulp van een **afleiding**. Als je in je afleiding de bewijsregels die op het laatste blad staan gebruikt om te laten zien heb je op een andere manier aangetoond dat formule is een logisch gevolg van .

c) [10] Geef een **afleiding** van . Schrijf bij elke tussenstap het nummer op van de gebruikte formule van het formuleblad.

¬p∨¬q , q [22] implicatie vervanging

p→¬q , q [26] contrapositie

q→¬p , q [25] modus ponens

¬p

ook mogelijk:

¬p∨¬q , q [28] conjunctie introductie

(¬p∨¬q) q [5] distributie

(¬p q) ∨ (¬qq) [16] F-eigenschap

(¬p q) ∨ F [17] F-eigenschap

(¬p q) [29] conjunctie eliminatie

¬p

**Opgave 3 [20] dis- / con- junctieve normaalvormen**

a) [7] De binaire operator ∆ is alleen waar als q uit p volgt en tegelijkertijd ook p uit q volgt. Schrijf p ∆ q in conjunctieve normaalvorm.

p ∆ q (p→q) ∧ (q→p)

⇔ (¬p∨q) ∧ (¬q∨p) CNV

Gegeven is de volgende formule in disjunctieve normaalvorm:

p ∨ (¬q∧¬s) ∨ (¬r∧¬s)

b) [7] Leg uit voor hoeveel waarderingen (p,q,r,s) deze formule waar is?

De hele formule wordt waar gemaakt als 1 van de 3 samenstellende delen p of (¬q∧¬s) of (¬r∧¬s) waar is.

p is waar als (p,q,r,s) = (1,?,?,?) dat zijn 8 waarderingen

(¬q∧¬s) is waar als (p,q,r,s) = (?,0,?,0) Dat voegt nog (0,0,0,0) en (0,0,1,0) toe,

(¬r∧¬s) is waar als (p,q,r,s) = (?,?,0,0) Dat voegt nog (0,1,0,0) toe.

In totaal dus 11 waarderingen

c) [6] Schrijf alle waarderingen (p,q,r,s) uit voor welke deze formule niet waar is.

Dat kunnen hoogstens de 8 waarderingen (p,q,r,s) met p=0 zijn, met uitzondering van de 3 waarderingen (p,q,r,s) met p=0 die bij vraag b) al waar bleken te zijn.

p q r s

0 1 1 1

0 1 1 0

0 1 0 1

0 1 0 0 was waar bij b)

0 0 1 1

0 0 1 0 was waar bij b)

0 0 0 1

0 0 0 0 was waar bij b)

**Opgave 4 [20] - predicatenlogica**

Gegeven zijn de predicaten

* is een student
* heeft een OV kaart
* is een docent
* heeft een baan
* luiert graag

Schrijf de volgende uitspraken met behulp van deze predicaten op:

a) [1] Er is een student die niet graag luiert.

b) [2] Niet alle docenten hebben een OV-kaart.

c) [2] Er is geen student die een baan heeft.

d) [2] Alle docenten luieren graag.

e) [2] Iedereen is docent en luiert graag.

f) [2] Niet alle studenten luieren graag

g) [2] Er is een docent met een OV-kaart.

h) [2] Welke 2 van de bovenstaande 7 uitspraken zijn equivalent op grond van de algemene geldigheid

De uitspraken f) en a)

i) [2] Wat zijn in die situaties dan de formules voor en ?

Dus in uitspraak f) en in uitspraak a)

j) [3] Toon met die formule voor , door middel van een afleiding, de equivalentie van die twee uitspraken aan.

in uitspraak f)

Dus [22] implicatie vervanging

[21] de Morgan

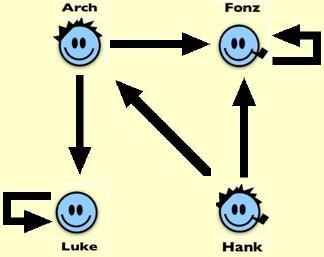
[19] dubbele negatie

In uitspraak a)

**Opgave 5 [15] (on)waarheid binnen een model**

Het model hiernaast heeft een domein dat bestaat uit de 4 elementen Arch, Fonz, Luke en Hank. Er zijn twee 1-plaatsige predicaten *K(x): x is Kaal* en

*P(x): x rookt Pijp* Er is een 2-plaatsig predicaat *H(x,y): x heeft een Hekel aan y* weergegeven door een pijl van x naar y



Geef per formule aan of deze wel of niet waar is in het gegeven model. Geef daarnaast ook telkens een onderbouwing van je antwoord.

a) [1] ¬∀xK(x) ↔ ∃x¬K(x)

**WAAR** Dit is een algemene (waar in **elk** model) geldigheid (zie bijvoorbeeld vraag 4h ). “niet elke x is kaal” is natuurlijk equivalent met “er is een x die niet kaal is”. Voor Hank geldt bijvoorbeeld dat hij niet kaal is, dus niet iedereen is kaal.

b) [1] ∃x¬P(x)

“er is een x die geen pijp rookt” **WAAR** Luke rookt bijvoorbeeld geen pijp

c) [2] ∀y(K(y) → H(y,y))

“elke kale y heeft een hekel aan zich zelf” **WAAR** Arch (0→0) Fonz(1→1) Luke (1→1) Hank(0→0) In alle gevallen is de implicatie dus waar. ( K(y) en H(y,y) zijn zelfs equivalent, ofwel er geldt altijd “y is kaal d.e.s.d.a. y een hekel aan zichzelf heeft”)

d) [2] ∀x∀y ( H(x,y) → H(y,x))

“voor elk paar (x,y) geldt: als x een hekel heeft aan y, dan heeft y ook een hekel aan x” **ONWAAR** Kijk bijvoorbeeld naar het paar (A,F): Arch heeft wel een hekel aan Fonz, maar Fonz niet aan Arch. Voor dat paar is de implicatie dus niet waar.

e) [2] ∀xP(x) ↔ ¬∃xK(x)

De linker uitspraak “elke x rookt pijp” is niet waar. Arch rookt bijvoorbeeld geen pijp. De rechter uitspraak “er is geen x die kaal is” is ook niet waar. Fonz is bijvoorbeeld wel kaal. De equivalentie van beide uitspraken is dus **WAAR**.

f) [2] ∀x∃y (K(x) → H(y,x))

“voor elke kale x geldt dat er een y bestaat die een hekel aan x heeft”. Voor Arch en Hank is de implicatie sowieso waar, want die zijn niet kaal. Aan de kale Fonz heeft bijvoorbeeld Hank een hekel. De kale Luke heeft een hekel aan zichzelf. De implicatie is dus in alle gevallen **WAAR**.

Vertaal de volgende predicaten in “gewone Nederlandse zinnen” binnen de context van het gegeven model

g) [1] ∀x(P(x) → K(x))

Alle pijprokers zijn kaal.

h) [1] ∃xH(x,x)

Er is iemand die een hekel heeft aan zichzelf.

i) [1] ∀x∃yH(x,y)

Iedereen heeft wel een hekel aan iemand

j) [1] ∃y∀xH(x,y)

Er is iemand aan wie iedereen een hekel heeft

h) [1] ∃x∀yH(x,y)

Er is iemand die een hekel heeft aan iedereen